

TP de Mathématiques – Séries et convergence

Séance n°2. Comment fonctionne votre calculatrice scientifique ?

Problèmes : En utilisant la théorie des séries entières et en particulier des séries de Taylor trouver un moyen de calculer les valeurs suivantes :

$$e^{1.37}, \sin(0,21466), \ln(1.338), \sqrt[3]{1.34}, (1.2)^{1.3}$$

I. Quelques rappels

Nous allons rappeler les différents développements en série entière que nous avons utilisés, soit R leur rayon de convergence :

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{rayon de convergence } R =]-\infty ; +\infty[.$$

$$(2) \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{rayon de convergence } R =]-\infty ; +\infty[.$$

$$(3) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \text{rayon de convergence } R =]-1 ; +1[.$$

$$(4) (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n, \quad \text{rayon de convergence } R =]-1 ; +1[.$$

$$-\infty < \alpha < +\infty.$$

II. Notre approche

1. Nous avons créé différentes fonctions :

- Une fonction pour calculer les factorielles
- Une fonction pour récupérer la valeur absolue d'un nombre : elle nous sera utile pour la condition d'arrêt sur l'épsilon.
- Une fonction pour calculer e^x pour un « n » particulier

- Une fonction pour calculer $\sin x$ pour un « n » particulier
- Une fonction pour calculer $\ln(1 + x)$ pour un « n » particulier
- Une fonction pour calculer $(1 + x)^\alpha$ pour un « n » et un « α » particulier.
- Deux fonctions « principales » paramétrables. Une pour calculer l'ensemble des séries (1), (2) et (3), une pour calculer les séries du type (4). La grosse différence entre les deux fonctions réside dans leur paramétrage. En effet, dans la « seconde fonction principale » il y a un paramètre en plus qui concerne la valeur de « α ».

2. Astuce pour le calcul de $\ln(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$:

Etant donné le rayon de convergence de $\ln(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$ il n'était pas possible de calculer directement $\ln(1.338)$, $\sqrt[3]{1.34}$ et $(1.2)^{1.3}$. Nous avons donc dû calculer $\ln(1 + 0.338)$, $(1 + 0.34)^{\frac{1}{3}}$ et $(1 + 0.2)^{1.3}$.

III. Notre programme Scilab

1. Fonctions communes utilisées pour le calcul de séries différentes :

❖ Calcul de factoriel :

```
function fact=factorielle(n)
... fact=1;
... for i=1:1:n;
...     fact=fact*i;
... end
endfunction
```

❖ Calcul de valeur absolue :

```
function val=valAbsolue(x)
... val=sqrt(x^2);
endfunction
```

2. Calcul de $e^{1.37}$:

❖ Calcul de e^x pour un « n » particulier :

```
function sExp = serieExp(x,n)
... sExp=x^n/factorielle(n);
endfunction
```

- ❖ « Fonction principal » pour le calcul de e^x [celle que l'on rentre dans la console] :

```
function s=serie(x,eps)
    s=0;
    n=0;
    while valAbsolue(serieExp(x,n))>eps
        s=s+serieExp(x,n);
        n=n+1;
    end
    s=s+1;
endfunction
```

x : la valeur de l'exponentielle à calculer

- ❖ Les résultats :

- Pour eps = 0.0001 :

```
-->serie(1.37,0.0001)
ans =
    3.9352965
```

- Pour eps = 0.001 :

```
-->serie(1.37,0.001)
ans =
    3.9349887
```

- Pour eps = 0.01 :

```
-->serie(1.37,0.01)
ans =
    3.9240083
```

- Avec une calculatrice « casio graph 35+ » :

$e^{1.37} = 3.935350695$

3. Calcul de $\sin(0,21466)$:

❖ Calcul de $\sin x$ pour un « n » particulier :

```
function sSin = serieSin(x,n)
    sSin=(-1)^n*(x^(2*n+1))/factorielle(2*n+1);
endfunction
```

❖ « Fonction principal » pour le calcul de $\sin x$ [celle que l'on rentre dans la console] :

```
function s=serie(x,eps)
    s=0;
    n=0;
    while valAbsolue(serieSin(x,n))>eps
        s=s+serieSin(x,n);
        n=n+1;
    end
    //s=s+1;
endfunction
```

x : la valeur du sinus à calculer

❖ Les résultats :

➤ Pour $\text{eps} = 0.0001$:

```
-->serie(0.21466,0.0001)
ans =
```

0.2130114

➤ Pour $\text{eps} = 0.001$:

```
-->serie(0.21466,0.001)
ans =
```

0.2130114

- Pour $\epsilon = 0.01$:

```
-->serie(0.21466,0.01)
ans =
```

0.21466

- Avec une calculatrice « casio graph 35+ » :

$\sin(0.21466) = 0.213015244$

4. Calcul de $\ln(1.338)$:

- ❖ Calcul de $\ln(1+x)$ pour un « n » particulier :

```
function sLn=serieLn(x,n)
... sLn=(-1)^(n+1)*((x-1)^n)/n;
endfunction
```

- ❖ Fonction principal pour le calcul de $\ln(1+x)$ [celle que l'on rentre dans la console] :

```
function s=serie(x,eps)
... s=0;
... n=1;
... while valAbsolue(serieLn(x,n))>eps
...     s=s+serieLn(x,n);
...     n=n+1;
... end
... //s=s+1;
endfunction
```

x : la valeur du logarithme népérien à calculer

- ❖ Les résultats :

- Pour $\epsilon = 0.0001$:

```
-->serie(1.338,0.0001)
ans =
```

0.2911203

- Pour $\text{eps} = 0.001$:

```
-->serie(1.338,0.001)
ans =
```

0.2904866

- Pour $\text{eps} = 0.01$:

```
-->serie(1.338,0.01)
ans =
```

0.2937495

- Avec une calculatrice « casio graph 35+ » :

$\ln(1.338) = 0.2911759617$

5. Calcul de $\sqrt[3]{1.34} = (1 + 0.34)^{1/3}$:

- ❖ Calcul de $(1 + x)^\alpha$ pour un « n » particulier :

```
function b=numérateurserieExposant(a,n)
.... b=1;
.... for i=0:1:(n-1);
....     b=b*(a-i);
.... end
endfunction
```

```
function sR3=serieExposant(x,a,n)
.... y=x-1;
.... sR3=(numérateurserieExposant(a,n))*(y^n)/factorielle(n);
endfunction
```

- ❖ Fonction principal pour le calcul de $(1+x)^{\alpha}$ [celle que l'on rentre dans la console] :

```
function s=sExposant(x,a,eps)
    s=0;
    n=1;
    while valAbsolue(serieExposant(x,n))>eps
        s=s+serieExposant(x,a,n);
        n=n+1;
    end
    s=s+1
endfunction
```

x : la valeur à calculer

α : la valeur de l'exposant

- ❖ Les résultats :

- Pour eps = 0.0001 :

```
-->sExposant(1.34,1/3,0.0001)
ans =
    1.1024731
```

- Pour eps = 0.001 :

```
-->sExposant(1.34,1/3,0.001)
ans =
    1.102466
```

- Pour eps = 0.01 :

```
-->sExposant(1.34,1/3,0.01)
ans =
    1.1023651
```

- Avec une calculatrice « casio graph 35+ » :

$$\sqrt[3]{1.34} = 1.102473771$$

6. Calcul de $(1.2)^{1.3}$:

On utilise les mêmes fonctions que précédemment.

❖ Les résultats :

- Pour $\text{eps} = 0.0001$:

```
-->sExposant(1.2,1.3,0.0001)
ans =
```

1.2674636

- Pour $\text{eps} = 0.001$:

```
-->sExposant(1.2,1.3,0.001)
ans =
```

1.2674669

- Pour $\text{eps} = 0.01$:

```
-->sExposant(1.2,1.3,0.01)
ans =
```

1.2678

- Avec une calculatrice « casio graph 35+ » :

$$(1.2)^{1.3} = 1.267463962$$