

Rapport TP Séries Entières

André Joan
Augustin Jorel



Dans ce TP, nous devons trouver le moyen de calculer différentes valeurs que voici :

$$e^{1.37}, \sin(0.21466), \cos(0.2166), \ln(1.338), \sqrt[3]{1.34}, (1.2)^{1.3}$$

Pour cela nous devons employer les développements en séries entières en utilisant particulièrement la méthode dite de Taylor qui permet une approximation au voisinage d'un point donné, et à l'aide du logiciel mathématique Scilab, obtenir des approximations concluantes.

Afin de réaliser nos objectifs nous avons créé dans l'éditeur de texte de Scilab les informations et fonctions que nous avons besoin, c'est à dire :

- Les Epsilons de valeurs $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.01$, $\epsilon_3 = 0.001$.
- Les différentes valeurs : $x_1 = 1.37$, $x_2 = 0.21466$, $x_3 = 1.338$, $x_4 = 1.34$, $x_5 = 1.2$.
- Les fonctions utilisées.

Avons de commencer nous avons défini quelques fonctions implémentant des formules usuelles :

```
3 function f=factoriel(n)
4     f=1;
5     cpt=1;
6     while cpt<>n+1
7         f = f*cpt;
8         cpt = cpt+1;
9     end
10 endfunction
11
12 function m=produitRacine(a,n)
13     m=1;
14     cpt = 0;
15     while cpt<>n
16         m = m*(1/a-cpt);
17         cpt = cpt+1;
18     end
19 endfunction
20
21 function m=produitPuissance(a,n)
22     m=1;
23     cpt = 0;
24     while cpt<>n
25         m = m*(a-cpt);
26         cpt = cpt+1;
27     end
28 endfunction
```

Si la fonction factoriel a l'évidente utilité de calculer un factoriel, les deux autres servent à obtenir respectivement les produits des séries entières de $(1+x)^a$ et $\sqrt[n]{1+x}$.

Maintenant nous allons calculer les valeurs demandées. Pour cela nous allons utiliser les formules mathématiques des séries entières. Celles que nous utiliserons sont les suivantes :

$x \mapsto e^x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$ Où $\alpha \in \mathbb{R}$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$] -1; +1[$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$] -1; +1[$

et

$$\sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right)}{k!} x^k$$

pour la racine cubique.

Une fois implémentées ces formules porterons un nom de fonction type comme « elementExpo(x,n) » pour la fonction exponentiel avec x une de nos valeurs définies précédemment et n un entier.

Puis afin d'obtenir les résultats désirés nous allons les calculer avec une marge d'erreurs de E1, E2 ou E3.

Pour cela la valeur de « elementExpo » (respectivement sin, cos ...) sera comparée à celle de l'Epsilon et si elle lui est inférieure, on arrête la boucle et le résultat final est retourné. Celui-ci correspond à la somme de chaque « elementExpo » (respectivement sin, cos ...) de chaque boucle.

A titre d'exemple, pour l'exponentiel :

```

32 function a=elementExpo(x,n)
33     a=x^n/factoriel(n);
34 endfunction
35
36 function S=SommeExpo(x,e)
37     N=0;
38     S=0;
39     while elementExpo(x,N)>e
40         S=S+elementExpo(x,N);
41         N=N+1;
42     end
43 endfunction

```

Ce qui nous renvoie le résultat suivant pour $x = x1$ et $e = e1$:

```
SommeExpo :
-->SommeExpo(x1,e1)
ans =
3.8837902
```

Après avoir procédé de la même façon pour les autres calculs on obtient les résultats organisés dans le tableau suivant :

	$e1 = 0.1$	$e2 = 0.01$	$e3 = 0.001$
$\exp(1.37)$	3.8837902	3.9349887	3.9352965
$\sin(0.21466)$	0.21466	0.2130114	0.2130114
$\cos(0.21466)$	1	0.97696050	0.9769605
$\ln(1.34)$	0.338	0.2904866	0.2911203
$(1.34)^{1/3}$	1,1020	1,10247	1,1024737710
$(1.2)^{1.3}$	1,26	1,2678	1,2678

Pour conclure, ces séries correspondent à la valeur réelle de chaque calcul. Cependant, ce ne sont que des approximations et on peut supposer que pour un epsilon encore plus petit on pourrait obtenir des résultats plus probants.