
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 3-4

THÈME : Séries de Fourier

5 mars 2010

Table des matières

1	Introduction	1
2	Séance 5	1
2.1	Transformée de Fourier discrète et techniques de compression	1
2.2	Equation de propagation de la chaleur	4
3	Séance 6. Représentation graphique d'une fonction définie par une série de Fourier	5

1 Introduction

Ces deux séances seront consacrées à l'étude des applications pratiques des séries de Fourier.

2 Séance 5

2.1 Transformée de Fourier discrète et techniques de compression

Problème 1. Comment calculer les coefficients de Fourier ? Nous allons considérer ici une fonction périodique de période 1 $f(t)$. On supposera que f est de classe $C^p[0, 1]$ avec $p \geq 2$. On va travailler avec la forme complexe de la série de Fourier de f

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n)e^{2\pi i n x}$$

où

$$c(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

1. Soit une fonction

$$f(x) = e^{-x^2}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. Pouvez vous calculer les coefficients de Fourier ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

2. Pour calculer de façon approchée les coefficients de Fourier d'une fonction on propose le procédé suivant. On choisit un pas Δt et on définit une subdivision régulière de l'intervalle $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = 1, \quad t_k = k * \Delta t = \frac{k}{M}$$

et on pose

$$\widetilde{c_M(n)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) e^{-2\pi i n \frac{k}{M}}$$

Expliquer pourquoi quand $M \rightarrow \infty$ on a $\widetilde{c_M(n)} \rightarrow c(n)$.

Problème 2. En utilisant les résultats de l'exercice précédent on peut définir une transformation qui est une approximation de la série de Fourier pour une fonction. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c(n) e^{2\pi i n x}$$

où

$$c(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

Ensuite on choisit de subdiviser l'intervalle $[0, 1]$ en précisément $M = 2N$ intervalles pour le calcul approché des coefficients. On obtient ainsi les $2N$ coefficients de Fourier approchés :

$$c_{2N}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f\left(\frac{k}{2N}\right) e^{-2\pi i n \frac{k}{2N}}$$

Cette construction permet de retrouver précisément les valeurs de la fonction f aux points de la subdivision $t_k = \frac{k}{2N}$ par l'égalité

$$f\left(\frac{k}{2N}\right) = \sum_{n=-N}^N c_{2N}(n) e^{2\pi i n \frac{k}{2N}}$$

Nous allons d'abord le constater par expérience.

1. Soit une fonction

$$f(x) = x(1 - x)$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. On utilisera la commande `dft` de scilab pour calculer les coefficients de Fourier.

```
fGraph=zeros(1,2*N+1);
for k=1:2*N+1
    fGraph(k)=f(t(k));
end
xset("window", 2);
plot2d(t,fGraph); // représentation graphique de la fonction

Cn=dft(fGraph,-1) // transformée de Fourier discrete

xset("window", 3);
plot2d(0:2*N,abs(Cn)); // représentation graphique des coefficients de Fourier

fn=dft(Cn,1) // transformée de Fourier discrete inverse

xset("window", 4);
plot2d(t,fn); // représentation graphique des coefficients de Fourier
```

2. On rappelle ici la propriété importante des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^p . Il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|c(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}$$

On dispose d'un enregistrement numérique d'un signal comportant $2 * N + 1$ échantillons. Comment peut on approcher ce signal par un autre qui prend moins de place (moins d'échantillons) en utilisant la propriété ci-dessus ?

3. Peut on supprimer des coefficients négligeables, dont la valeur absolue est inférieure à un seuil donné, ε ? Si oui, peut on estimer l'erreur d'approximation ?
4. On souhaite faire une compression de $P\%$.
- (a) Combien de coefficients de Fourier doit on retenir ?
 - (b) Comment choisir les coefficients à retenir ? Est ce qu'il est mieux de prendre les premiers dans l'ordre de numérotation ou les plus grands ?
5. utilisez les programmes scilab fournis (sur AREL) pour vérifier vos réponses.

2.2 Equation de propagation de la chaleur

Problème 3. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On cherche une fonction $u(x, t)$, définie sur l'ensemble $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$, deux fois continûment dérivable selon x et une fois continûment dérivable selon t qui vérifie cette équation et les **conditions aux limites**

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x)$$

où $g(x) \in C^2[0, 1]$, $g(0) = g(1) = 0$.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

vérifient l'équation ci-dessous et les **conditions aux limites** :

$$u_n(0, t) = u_n(1, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

.

2. Montrer que toute combinaison linéaire des fonctions $u_n(x, t)$ de type

$$s_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

vérifie la même équation et les mêmes conditions aux limites.

3. Supposons que $g(x)$ est une fonction continue telle que $g(0) = g(1) = 0$. Est-il possible de trouver un N et des coefficients α_n pour que la condition initiale soit également satisfaite : $s_N(x, 0) = g(x)$?
4. Pour une fonction $g(x)$ quelconque, est-il possible de trouver la solution de l'équation qui vérifie les conditions aux limites et initiale sous forme d'une série ? Si oui, comment déterminer les coefficients α_n ?
5. Expérimentez votre solution pour

$$g(x) = x(1 - x)$$

3 Séance 6. Représentation graphique d'une fonction définie par une série de Fourier

Cette séance est consacrée à un travail autonome en classe. **La présence à cette séance est obligatoire.** On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. A la fin de la séance de travail vous devez déposer sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le points essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numériques ont été obtenus dans votre étude consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont ils, selon vous, conformes aux attentes ?
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web)
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strictement personnelle !

Problème 4. Vous avez obtenu la solution de l'équation de propagation $u(x, t)$ de la chaleur sous forme de série de Fourier. c'est une fonction de deux variables réelles. Cette équation décrit l'évolution de la température dans une barre linéaire, de longueur 1 que l'on suppose isolée et dont les extrémités sont maintenues à température constante , nulle. Cette dernière condition correspond aux conditions aux limites associées à notre équation :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \text{ for all } t > 0$$

On suppose également que l'on connaît la répartition de la température à l'instant $t = 0$. c'est la donnée de la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x) = x(1 - x)$$

Ainsi la fonction $u(x, t)$ solution de l'équation fournit la température dans chaque point $x \in [0, 1]$ de la barre à tout instant de temps t .

1. Ecrivez une fonction scilab qui calcule la température de la barre pour un x et un t quelconques. Vous utiliserez un paramètre supplémentaire, ε pour indiquer la précision de calcul voulue. Le prototypage de la fonction doit être le suivant :

```
function u=temp(x,t,epsilon)
...
endfunction
```

2. Utilisez la fonction créée précédemment pour construire sa représentation graphique sur le domaine $D = [0, 1] \times [0, T]$ où T peut prendre des valeurs 1, 2, 10, 15. Pour créer les subdivisions des intervalles concernés vous utiliserez les pas $dx = 0.01$, $dt = 0.01$.
3. **IMPORTANT !** Votre rapport doit reprendre dès le début toute la résolution de l'équation à partir des éléments faits en classe. En conclusion, joignez la représentation graphique de la solution en 3D (vous pouvez enregistrer les graphiques scilab en png à partir du menu Fichier de la fenêtre graphique, en choisissant "exporter" et en précisant le format PNG); Ajoutez également quelques exemples de calcul des températures à des instants différents de temps.