
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Séances 3-4

THÈME : Séries de Fourier

9 février 2010

Table des matières

1	Introduction	1
2	Séance 3	2
2.1	Un peu de Scilab	2
2.1.1	Les tableaux avec Scilab	2
2.1.2	Les graphiques avec Scilab	3
2.2	Une fonction et sa série de Fourier	4
2.3	Transformée de Fourier discrète et techniques de compression	5
3	Séance 4. Equation de propagation de la chaleur	6

1 Introduction

Ces deux séances seront consacrées à l'étude des applications pratiques des séries de Fourier. On y apprendra également à utiliser Scilab pour tracer les graphiques de fonctions d'une variable.

2 Séance 3

2.1 Un peu de Scilab

2.1.1 Les tableaux avec Scilab

L'utilisation de matrices et vecteurs est généralisée en Scilab. Beaucoup de fonctions sont définies avec des arguments sous forme de vecteurs ou de matrices. Une matrice est un tableau de n lignes et m colonnes. On peut définir une matrice explicitement :

```
A=[1, 2, 3;4,5,6]
```

A remarquer : on sépare les éléments d'une même ligne par des virgules (ou des espaces) et les lignes entre elles par des ";".

Voici quelques commandes qui créent des matrices simples :

```
I=eye(n); //crée une matrice identité de taille n
```

```
Z=zeros(n,m); // crée une matrice nulle de n lignes et m colonnes
```

```
U=ones(n,m); // crée une matrice de taille n x m remplie de 1
```

Les opérations algébriques sur les matrices sont simples, à condition de respecter les dimensions

```
A=[1, 2, 3;4,5,6];
```

```
B=ones(2,3);
```

```
C=A'; // transposée
```

```
D=A+0.5*B; // somme et multiplication par une constante
```

```
E=C*D; // multiplication de matrices
```

Les vecteurs sont des cas particuliers de matrices : soit des matrices lignes, soit des matrices colonnes.

```
x=[1, 2, 3]; // vecteur ligne
```

```
y=ones(3,1); // vecteur colonne
```

```
z=A*y; // multiplication de matrice et de vecteur colonne
```

Pour accéder aux éléments d'une matrice on utilise la syntaxe suivante

```
a=A(1,3); // coefficient de la première ligne, 3ème colonne
```

```
b= x(2); // dans le cas d'un vecteur ligne ou colonne il suffit d'indiquer la
```

Pour créer une subdivision d'un intervalle avec un pas donné :

```
dt=0.1;  
t=t0:dt:t1;
```

Cette syntaxe crée un vecteur ligne dont les éléments sont définis par $t(i) = t0 + i * dt$. Il est ainsi possible de l'utiliser comme un vecteur.

Enfin, de nombreuses fonctions élémentaires acceptent des arguments matriciels. Par exemple

```
dt=0.1;  
t=t0:dt:t1;  
s=sin(t);
```

La dernière commande est équivalente au calcul d'un tableau de valeurs de la fonction $\sin(t)$ dans tous les points du tableau t :

```
dt=0.1;  
t=t0:dt:t1;  
for i=1:length(t) // ici length(t) renvoie le nombre d'éléments de t  
s(i)=sin(t(i));  
end
```

2.1.2 Les graphiques avec Scilab

Fonctions d'une variable Pour une fonction $f(x)$ d'une seule variable le graphique est défini par la donnée de deux tableaux :

- x les points d'abscisses
- y les points $y(i) = f(x(i))$

La commande `plot2d(x,y)` crée une fenêtre graphique et y affiche les points.

Fonctions de deux variables Pour une fonction $f(x,y)$ le graphique est défini par la donnée de trois tableaux :

- x les points d'abscisses, y les points d'ordonnée

- z la matrice dont le nombre de lignes est la taille de x et le nombre de colonnes est la taille de y et telle que

$$z(i, j) = f(x(i), y(j))$$

La commande `plot3d(x, y, z)` crée une fenêtre graphique et y affiche les points.

Problème 1. 1. Créer une fonction de deux arguments : $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ qui renvoie

$$\sin(n\pi x)$$

2. Tracer le graphe de cette fonction pour différents choix de n sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

3. Définir une fonction de deux arguments x et t qui renvoie

$$e^{-t} \sin(2\pi x)$$

Tracer son graphe sur le rectangle $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

2.2 Une fonction et sa série de Fourier

Problème 2. Convergence d'une série de Fourier. Phénomène de Gibbs

Nous allons considérer ici une fonction périodique de période 2π .

1. Quelles sont les fonctions auxquelles on peut associer une série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

Est ce que les mêmes fonctions peuvent toujours être décomposées en série de Taylor ?

2. Soient les fonctions

$$f(x) = (x - \pi)(x + \pi), \quad g(x) = \frac{x - \pi}{2}$$

- Est ce que ces fonctions peuvent être décomposées en série de Fourier ?
- Si oui, calculer leurs coefficients de Fourier
- Tracer les graphes de ces fonctions avec Scilab
- Calculer les sommes partielles (pour $n = 1, 2, 5, 10, 40$) des séries de Fourier des deux fonctions et les tracer. Que observez vous ? Pouvez vous expliquer vos observations ?

Problème 3. Comment calculer les coefficients de Fourier ? Nous allons considérer ici une fonction périodique de période 1 $f(t)$. On supposera que f est de classe $C^p[0, 1]$ avec $p \geq 2$. On va travailler avec la forme complexe de la série de Fourier de f

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n) e^{2\pi i n x}$$

où

$$c(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

1. Soit une fonction

$$f(x) = e^{-x^2}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. Pouvez vous calculer les coefficients de Fourier ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

2. Pour calculer de façon approcher les coefficients de Fourier d'une fonction on propose le procédé suivant. On choisit un pas Δt et on définit une subdivision régulière de l'intervalle $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = 1, \quad t_k = k * \Delta t = \frac{k}{M}$$

et on pose

$$\widetilde{c_M(n)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) e^{-2\pi i n \frac{k}{M}}$$

Expliquer pourquoi quand $M \rightarrow \infty$ on a $\widetilde{c_M(n)} \rightarrow c(n)$.

2.3 Transformée de Fourier discrète et techniques de compression

Problème 4. En utilisant les résultats de l'exercice précédent on peut définir une transformation qui est une approximation de la série de Fourier pour une fonction. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c(n) e^{2\pi i n x}$$

où

$$c(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

Ensuite on choisit de subdiviser l'intervalle $[0, 1]$ en précisément $M = 2N$ intervalles pour le calcul approché des coefficients. On obtient ainsi les $2N$ coefficients de Fourier approchés :

$$c_{2N}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f\left(\frac{k}{2N}\right) e^{-2\pi i n \frac{k}{2N}}$$

Cette construction permet de retrouver précisément les valeurs de la fonction f aux points de la subdivision $t_k = \frac{k}{2N}$ par l'égalité

$$f\left(\frac{k}{2N}\right) = \sum_{n=-N}^N c_{2N}(n) e^{2\pi i n \frac{k}{2N}}$$

Nous allons d'abord le constater par expérience.

1. Soit une fonction

$$f(x) = x(1 - x)$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. On utilisera la commande `dft` de `scilab` pour calculer les coefficients de Fourier.

```
fGraph=zeros(1,2*N+1);
for k=1:2*N+1
    fGraph(k)=f(t(k));
end
xset("window", 2);
plot2d(t,fGraph); // représentation graphique de la fonction

Cn=dft(fGraph,-1) // transformée de Fourier discrete

xset("window", 3);
plot2d(0:2*N,abs(Cn)); // représentation graphique des coefficients de Fourier

fn=dft(Cn,1) // transformée de Fourier discrete inverse

xset("window", 4);
plot2d(t,fn); // représentation graphique des coefficients de Fourier
```

2. On rappelle ici la propriété importante des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^p . Il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|c(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}$$

On dispose d'un enregistrement numérique d'un signal comportant $2 * N + 1$ échantillons. Comment peut on approcher ce signal par un autre qui prend moins de place (moins d'échantillons) ?

3 Séance 4. Equation de propagation de la chaleur

Cette séance est consacrée à un travail autonome en classe. **La présence à cette séance est obligatoire.** On vous propose de résoudre un problème énoncé ci-dessous. A la fin de la séance de travail vous devez dé-

poser sur AREL un résumé de 1-3 pages de vos résultats. Voici quelques recommandations pour la rédaction de ce document.

- Vous devez y exposer votre analyse du problème et la solution que vous avez imaginée.
- Il est fondamental que toute affirmation de votre part soit justifiée et argumentée avec la plus grande rigueur mathématique. C'est le points essentiel qui sera jugé.
- Si des résultats numériques ont été obtenus dans votre étude consacrez quelques lignes à leur analyse. Sont ils, selon vous, conformes aux attentes ?
- Décrivez la manière dont vous avez procédé pour trouver la solution, les sources documentaires que vous avez consultées (livres, notes de cours, web)
- Il n'est pas interdit de débattre de vos idées avec vos camarades de classe, mais votre rédaction doit rester strictement personnelle !

Problème 5. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On cherche une fonction $u(x, t)$, définie sur l'ensemble $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$, deux fois continûment dérivable selon x et une fois continûment dérivable selon t qui vérifie cette équation et les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

et initiale

$$u(x, 0) = g(x)$$

où $g(x) \in C^2[0, 1]$, $g(0) = g(1) = 0$.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

vérifient l'équation ci-dessous et les conditions aux limites : $u_n(0, t) = u_n(1, t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

2. Montrer que toute combinaison linéaire des fonctions $u_n(x, t)$ de type

$$s_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

vérifie la même équation et les mêmes conditions aux limites.

3. Est-il possible de trouver un N et des coefficients α_n pour que la condition initiale soit également satisfaite : $s_N(x, 0) = g(x)$?
4. Pour une fonction $g(x)$ quelconque, est il possible de trouver la solution de l'équation qui vérifie les conditions aux limites et initiale sous forme d'une série ? Si oui, comment déterminer les coefficients α_n ?
5. Expérimentez votre solution pour

$$g(x) = x(1 - x)$$

Trouvez la solution et représentez son graphe à l'aide de scilab.