

Proies et prédateurs

Sébastien PEDREAU

Christian INGOUFF

Année 2012/2013

Semestre 4

Sommaire

1	Proies et prédateurs	2
1.1	Introduction	2
1.2	Méthodes	2
1.2.1	Réduction de matrice	4
1.2.2	Matrice exponentielle	5
1.2.3	Méthode d'Euler	6
1.3	Résultats et Analyse	7
1.3.1	Analyse graphique	7

Chapitre 1

Proies et prédateurs

1.1 Introduction

Nous allons à présent étudier les différentes méthodes numériques pour traiter des systèmes différentiels. La résolution de tels systèmes est très utile, notamment dans le traitement du problème proies-prédateurs, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de deux populations dépendantes l'une de l'autre (Grossièrement dans notre cas, une population qui mange l'autre pour croître).

1.2 Méthodes

Nous supposons deux populations dans un océan : des requins et des sardines. Nous ferons deux hypothèses initiales :

- Hypothèse 1 : Les sardines disposent de nourriture en quantité non limitée et seuls les requins s'opposent à la croissance de leur population.
- Hypothèse 2 : Le nombre de requins est limité par la quantité de sardines dont ils disposent pour se nourrir.

On pose le système suivant pour représenter l'évolution à étudier :

$$\begin{cases} s'(t) &= 4s(t) - 2r(t) \\ r'(t) &= s(t) + r(t) \end{cases}$$

Auquel on adjoindra les questions initiales $s(0) = s_0$ et $r(0) = r_0$.

On pose $X' = \begin{pmatrix} s'(t) \\ r'(t) \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} s(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$.

On peut donc écrire ce système sous forme matricielle $X' = A X$:

$$X' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Que l'on peut également écrire sous la forme d'une matrice exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp X' &= \exp (AX) \\ \rightarrow \exp X' &= \sum_{k \geq 0} \frac{(AX)^k}{k!} \end{aligned}$$

Nous remarquons la présence de $(AX)^k$, et nous décidons donc de diagonaliser A pour obtenir un calcul plus facile à résoudre.

Soit χ_A polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A &= (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 \\ \rightarrow \chi_A &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \rightarrow \chi_A &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) \end{aligned}$$

Donc on en déduit que $S_p(A) = 2 ; 3$. On peut alors calculer les sous-espaces propres :

- Soit $X \in \text{SEP}(A ; 2)$;
 $AX = 2X$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

Donc $X \in \text{vect } 1, 1$.

- Soit $X \in \text{SEP}(A ; 3)$;
 $AX = 3X$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

Donc $X \in \text{vect } 2, 1$.

On en déduit donc que $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On pose $D = P^{-1}AP$, et on trouve $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Avec ces nouvelles données, tentons de résoudre le système initial à travers différentes méthodes.

1.2.1 Réduction de matrice

La première méthode que nous pouvons utiliser afin de résoudre ce problème est la réduction de matrice.

On pose $Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ tel que :

$$Y = P^{-1}X$$
$$\rightarrow Y = \begin{pmatrix} -s(t) + 2r(t) \\ s(t) - r(t) \end{pmatrix}$$

et

$$Y' = DY$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u(t) \\ 3v(t) \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} u'(t) &= 2u(t) \\ v'(t) &= 3v(t) \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{u'(t)}{u(t)} &= 2 \\ \frac{v'(t)}{v(t)} &= 3 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \ln(u(t)) &= 2t + K_1 \\ \ln(v(t)) &= 3t + K_2 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} u(t) &= K_1 \exp(2t) \\ v(t) &= K_2 \exp(3t) \end{cases}$$

Avec $K_1 + K_2 = s_0$ et $K_1 + K_2 = r_0$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} u(t) &= (2r_0 - s_0) \exp(2t) \\ v(t) &= (s_0 - r_0) \exp(3t) \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} r(t) &= (2r_0 - s_0) \exp(2t) + (s_0 - r_0) \exp(3t) \\ s(t) &= (2r_0 - s_0) \exp(2t) + (2s_0 - 2r_0) \exp(3t) \end{cases}$$

1.2.2 Matrice exponentielle

Nous pouvons également résoudre le système en faisant appel à la matrice exponentielle.

On a $A = PDP^{-1}$, donc $\exp(tA) = \exp(tPDP^{-1})$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \sum_{k \geq 0}^n \frac{(tPDP^{-1})^k}{k!} \\ \rightarrow \exp(tA) &= \sum_{k \geq 0}^n \frac{t^k (PDP^{-1})^k}{k!}\end{aligned}$$

Démonstration par récurrence :

Nous allons démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{R} : (PDP^{-1})^k = PD^k P^{-1}$

- Pour $k = 1$, on a bien $PDP^{-1} = PD^1 P^{-1}$
- On suppose qu'à un certain rang k , on a $(PDP^{-1})^k = PD^k P^{-1}$

$$\begin{aligned}(PDP^{-1})^{k+1} &= (PDP^{-1})^k * PDP^{-1} \\ \rightarrow (PDP^{-1})^{k+1} &= PD^k P^{-1} * PDP^{-1} \\ \rightarrow (PDP^{-1})^{k+1} &= PD^{k+1} P^{-1}\end{aligned}$$

- D'après l'axiome de récurrence, on a bien $\forall k \in \mathbb{R} :$
 $(PDP^{-1})^k = PD^k P^{-1}$

On a donc :

$$\exp(tA) = \sum_{k \geq 0}^n \frac{t^k}{k!} PD^k P^{-1}$$

$$\text{Or } PD^k P^{-1} = \begin{pmatrix} -2^k + 2 * 3^k & 2^{k+1} - 2 * 3^k \\ -2^k + 3^k & 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \sum_{k \geq 0}^n \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} -2^k + 2 * 3^k & 2^{k+1} - 2 * 3^k \\ -2^k + 3^k & 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix} \\ \rightarrow \exp(tA) &= \begin{pmatrix} (-\sum_{k \geq 0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 2 \sum_{k \geq 0}^n \frac{(3t)^k}{k!}) & (2 \sum_{k \geq 0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k \geq 0}^n \frac{(3t)^k}{k!}) \\ (-\sum_{k \geq 0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + \sum_{k \geq 0}^n \frac{(3t)^k}{k!}) & (2 \sum_{k \geq 0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k \geq 0}^n \frac{(3t)^k}{k!}) \end{pmatrix} \\ \rightarrow \exp(tA) &= \begin{pmatrix} -\exp(2t) + \exp(3t) & 2\exp(2t) - 2\exp(3t) \\ -\exp(2t) + \exp(3t) & 2\exp(2t) - \exp(3t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.2.3 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler, du nom du célèbre mathématicien, permet de résoudre des systèmes différentiels du premier ordre par approximation. Cette méthode est très pratique, bien que sujette à des erreurs non négligeables lors des calculs, lorsque l'on ne sait pas résoudre le système différentielle.

En effet, la méthode utilisée par Euler ne demande que la condition initiale du système, ainsi qu'une relation de récurrence entre le terme au moment T_n , et le terme au moment T_{n+1} . Grâce à la condition initiale, on peut ainsi calculer le premier point, à partir duquel on pourra calculer le second, et ainsi de suite.

Pour résoudre cette méthode, nous poserons des hypothèses supplémentaires :

- Hypothèse 3 : En l'absence de requins, s obéit à une loi exponentielle.
- Hypothèse 4 : Volterra suppose qu'en l'absence de sardines, r obéit à une loi de décroissance exponentielle (Cette hypothèse est très discutable).
- Hypothèse 5 : Le produit $s(t)r(t)$ est proportionnel au nombre de rencontre. Une telle rencontre est bonne pour le requin mais mauvaise pour la sardine.

Ces hypothèses nous conduisent à un nouveau système différentiel :

$$\begin{cases} s'(t) &= as(t) - cs(t)r(t) \\ r'(t) &= -br(t) + ds(t)r(t) \end{cases}$$

Où a , b , c et d sont des constantes positives.

Ce système ne peut pas être résolu de façon écrite, et l'on doit alors recourir à l'outil informatique scilab pour modéliser des courbes. Afin de créer ces courbes, nous posons $H(t)$, qui nous permettra de déterminer la position des points des courbes.

$$\begin{aligned} H'(t) &= f(t, H(t)) \\ \rightarrow \begin{pmatrix} s'(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} &= f(t, \begin{pmatrix} s(t) \\ r(t) \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

On va utiliser la méthode d'Euler pour calculer le point à un instant t_{n+1} en fonction du points précédents, ce qui rendra le calcul de la machine simple du moment que l'on connait le point initial à l'instant t_0 . On a donc :

$$\begin{aligned} H(t_{n+1}) &\simeq H(t_n) + H'(t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ \rightarrow H(t_{n+1}) &= H(t_n) + f(t_n, H(t_n))(t_{n+1} - t_n) \\ \rightarrow H(t_{n+1}) &= H(t_n) + f(t_n, H(t_n))\Delta t \end{aligned}$$

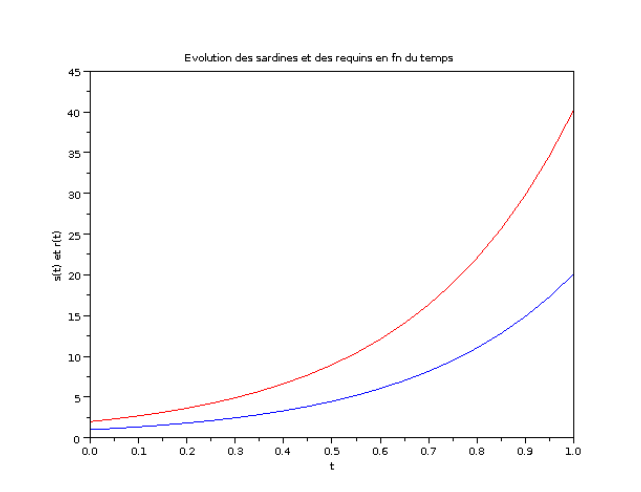
Ce qui va nous permettre de produire des courbes que nous pourrons analyser.

1.3 Résultats et Analyse

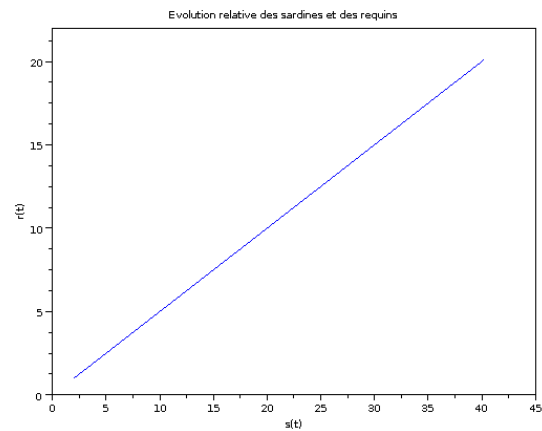
1.3.1 Analyse graphique

Nous avons eu recours à Scilab afin de modéliser l'évolution du nombre de requins et de sardines. L'aisance de cette analyse est aidée par la fonction *expm* implémentée dans Scilab, qui permet de calculer directement une exponentielle de matrice. Cela nous a permis de vérifier nos résultats, la courbe de l'expression analytique devant coïncider avec l'exponentielle.

Première situation : $(s_0, r_0) = (2, 1)$

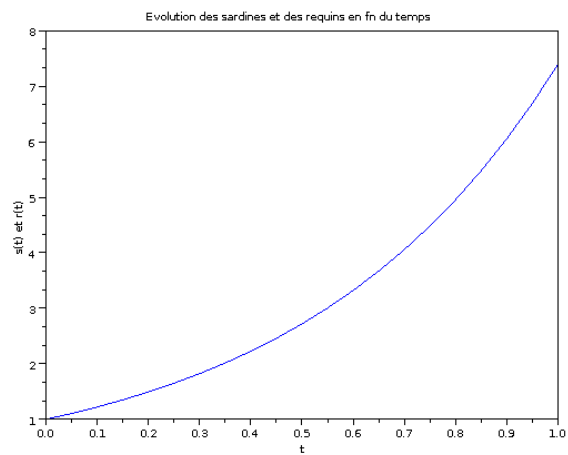


En étudiant l'évolution du nombre de requins et de sardines par rapport au temps, on constate que nos résultats sont cohérents : la croissance du nombre de requins est limitée par celle des sardines.



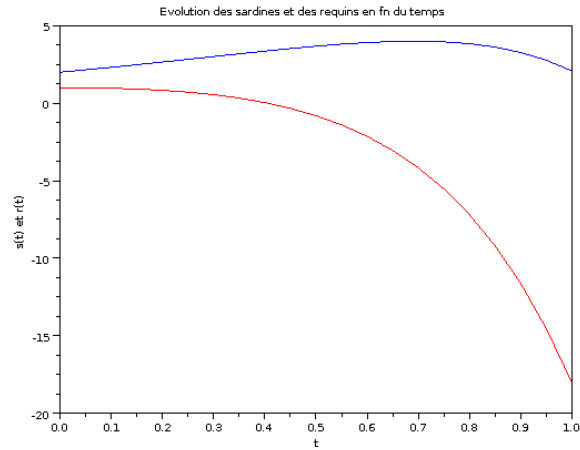
On constate en étudiant l'évolution relative des 2 nombres que la croissance est deux fois plus grande chez les sardines que chez les requins.

Deuxième situation : $(s_0, r_0) = (1, 1)$



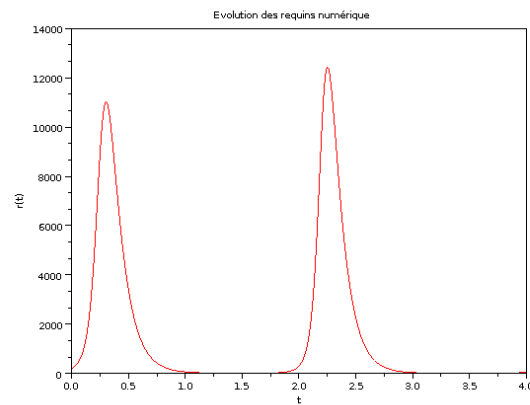
Seules les sardines sont capable de croître dans ce cas : la croissance des requins est compromise par la pénurie de sardines.

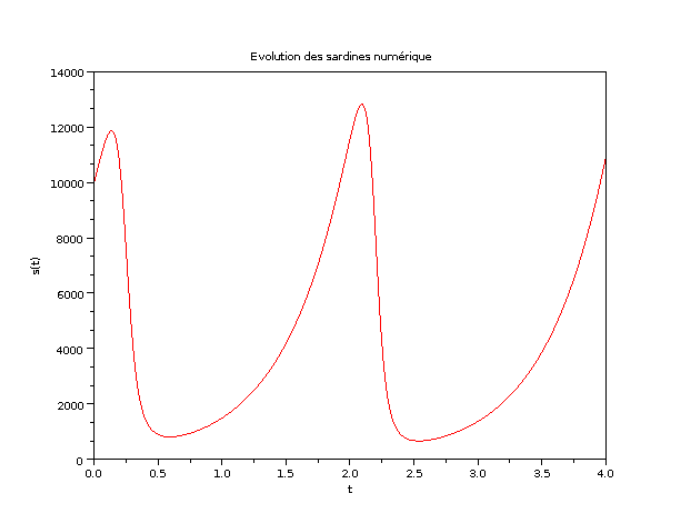
Troisième situation : $(s_0, r_0) = (1, 2)$



Nous étudierons seulement les valeurs positives de (s_0, r_0) . Les sardines se voient annihilées par les requins (vers $t = 0.5$, $s_t = 0$), ce qui compromettra la croissance des requins par la suite.

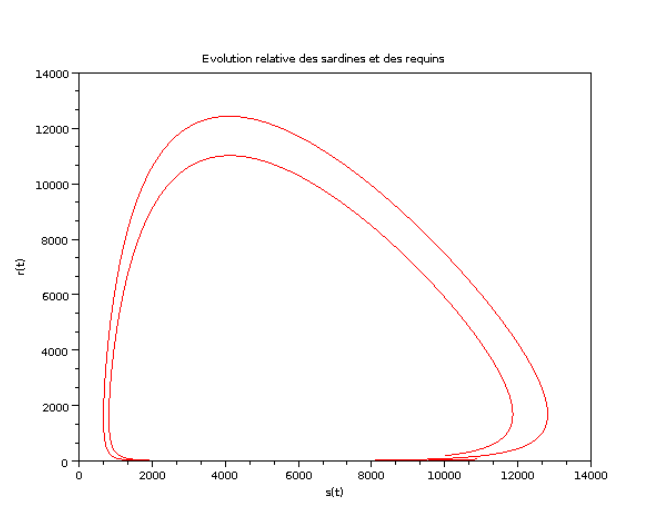
Cinquième situation : Méthode d'Euler





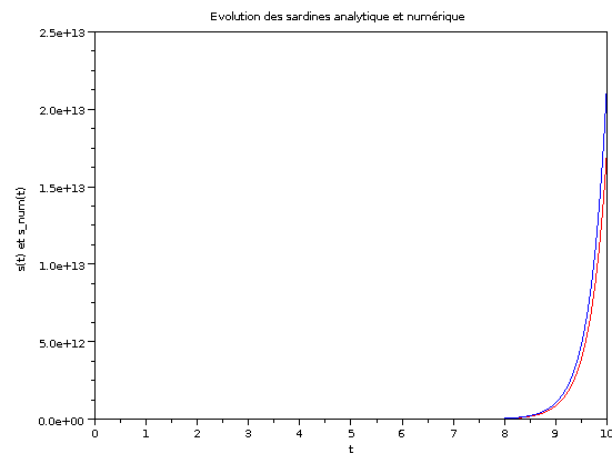
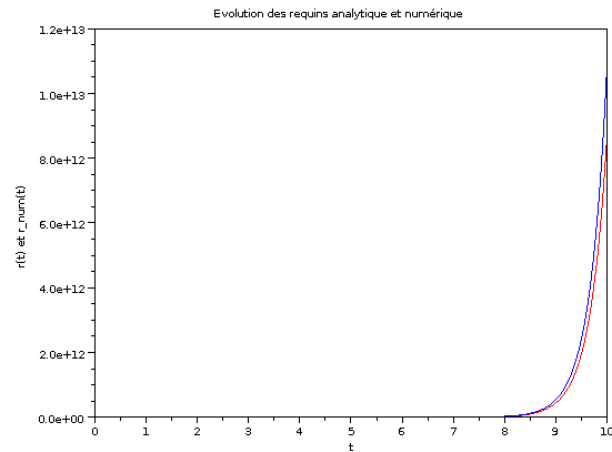
Nous avons utilisé la méthode d'Euler présenté précédemment avec les constantes $a = 2.1$; $b = 10.2$; $c = 0.0013$ et $d = 0.0024$.

Nous remarquons que lorsque la population de sardines baisse, celle des requins, fautes de nourriture, devient très faible. Le nombre de prédateurs étant devenu négligeable, cela permet à la population de sardines de grandir. La nourriture étant devenue abondante, les requins deviennent plus nombreux, et ce jusqu'à ce que la population des sardines baisse : les populations décrivent des cycles.



Sur ce schéma, nous voyons bien la relation entre la population des requins et la population des sardines, ainsi que les cycles que ces mêmes populations décrivent. On remarquera qu'à chaque cycle, la population semble grandir. Cela pourrait-être liée à l'erreur venant de la méthode d'Euler.

Comparaison :



Nous avons ici la courbe obtenue avec la méthode d'Euler, et celle obtenue grâce aux autres méthodes présentées dans ce rapport : on constate au fur et à mesure du temps que l'erreur (c'est-à-dire l'espace entre les courbes) devient de plus en plus grande, et qu'elle est plus ou moins importante selon le pas Δt choisi. Il convient de choisir un pas petit pour obtenir un résultat exact.